14/5/20

Λογισμός μεταβολών

Το βασικό πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι να βρούμε τη συν/ση $y = y(x)$ τέτοια ώστε το ολ/μα

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

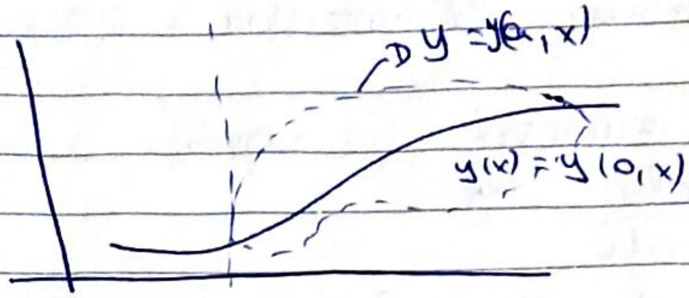
είναι ακρότατο, δηλ. μέγιστο ή ελάχιστο.

Το ολ/μα J είναι ένα συναρτησοειδές και εξαρτάται από την $y(x)$ αν τα x_1, x_2 είναι σταθερά. Γενικά μπορούμε να γενικεύσουμε και να ζητάμε τις τιμές των x_1, x_2 και την $y(x)$ ώστε το J να είναι ακρότατο.
Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την $y(x)$ ώστε το J να ελαχιστοποιείται. Δηλ. οποιαδήποτε άλλη $y(x)$ θα έχει J μεγαλύτερο από αυτή τη τιμή.

Γράφουμε τη συνάρτηση ως $y=y(a,x)$ ώστε:
$y(x)=y(0,x)$. Ζητούμενη συνάρτηση

Δηλ. για τις διάφορες τιμές του a υπάρχει μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια τιμή του J. Για $a=0$ το J ελαχιστοποιείται. Άρα μεταβάλλουμε το a ώστε τελικά να βρούμε τη βέλτιστη (ελάχιστη) τιμή του J.

Σχηματικά



Ορίζουμε μια συνάρτηση $\eta(x)$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε:

$$y(a,x)=y(0,x)+a\eta(x)$$

Επίσης

$$\left.\begin{cases} y(a,x_1)=y(0,x_1) \\ y(a,x_2)=y(0,x_2) \end{cases}\right\} \Rightarrow \eta(x_1)=\eta(x_2)=0$$

Τελικά:

$$J(a)=\int_{x_1}^{x_2} f\left(y(a,x),\, y'(a,x),\, x\right) dx$$

Τότε το ακρότατο / ελάχιστο θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\left.\frac{dJ}{da}\right|_{a=0}=0$$

που θα είναι προφανώς αναγκαία συνθήκη

Παράδειγμα

Θεωρούμε $f=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ στο $J=\int_0^{2\pi} f\,dx$ και λύση την $y(x)=x$. Τότε επιλέγουμε $\eta(x)=\sin x$, δηλαδή $y(a,x)=x+a\sin x$. Άρα $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(1+a\cos x)^2$

Δηλαδή:

$$J(a)=\int_0^{2\pi} f\,dx=\int_0^{2\pi}(1+2a\cos x+a^2\cos^2 x)\,dx=2\pi+a^2\pi$$

Συνεπώς πράγματι ελαχιστοποιείται για $a=0$

Οι εξισώσεις Euler

Έστω λοιπόν ότι πλέον το συναρτησιακό μας είναι:

$$J(a)=\int_{x_1}^{x_2} f(y(a,x),\,y'(a,x),\,x)\,dx$$

Τότε:

$$\frac{dJ}{da}=\frac{\partial}{\partial a}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$$ και όπως προηγουμένως

(*) $f=(y')^2$ τότε $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ και $\frac{\partial f}{\partial y'}=2y'$

$$y(a,x)=y(0,x)+a\eta(x)$$

άρα:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}=\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'} \quad (*)$$

Δηλαδή

$$\frac{dJ}{da}=\frac{d}{da}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial a}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Για τον 2ο όρο χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\,dx=\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx=$$

$$=-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Συνολικά

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2}\left[u(x)\frac{\partial f}{\partial y} - u(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} u(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$ και για $a=0$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial a}\right|_{a=0} = \int_{x_1}^{x_2} u(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0 \quad \forall u(x)$$

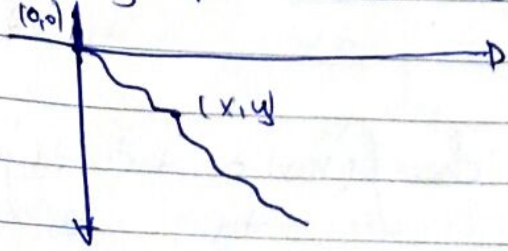
Μια αναγκαία συνθήκη είναι η εξίσωση Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Παράδειγμα: Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου: Ένα υλικό σημείο κινείται κάτω από την επίδραση σταθερού πεδίου ξεκινώντας από ηρεμία στο σημείο (x_1, y_1) και μεταβαίνει σε ένα χαμηλότερο σημείο (x_2, y_2). Ν.β. η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει το σωμάτιο για να ολοκληρώσει τη μετάβαση στον ελάχιστο δυνατό χρόνο

Λύση:

Θεωρούμε ότι $(x_1, y_1) = (0,0)$ ώστε σχηματικά



Ο χρόνος μετάβασης είναι $t = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{v}$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας $T+U=0$ και άρα στο τυχαίο σημείο (x,y): $\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v^2 = 2gy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

Συνεπώς $t = \int_{(0,0)}^{(x_2,y_2)} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_{(0,0)}^{(x_2,y_2)} \frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{2gy}}\, dy =$

$= \int_0^{y_2} \left(\frac{x'+1}{2gy}\right)^{1/2} dy$

Άρα: $f = \sqrt{\frac{x'+1}{2gy}}$ και από την εξίσωση Euler

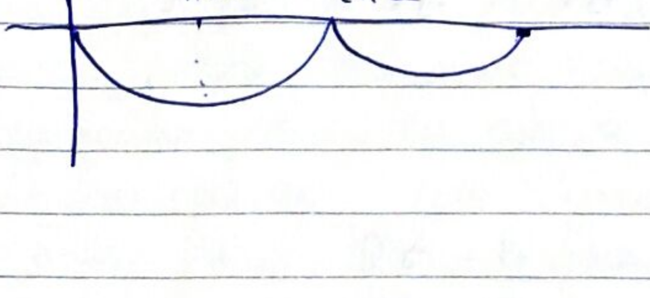
$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \to \frac{\partial f}{\partial x'} =$ σταθερά $=$

$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \Rightarrow \frac{(x')^2}{y(1+x'^2)} = \frac{1}{2a} \Rightarrow x = \int \frac{y\,dy}{(2ay-y^2)^{1/2}}$,

$y = a(1-\cos\theta)$
$dy = a\sin\theta\, d\theta$

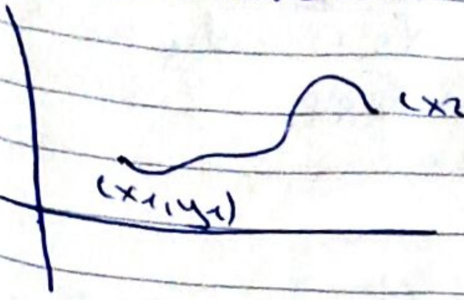
Όστε $x = \int a(1-\cos\theta)d\theta = a(\theta - \sin\theta) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$ που αντιστοιχεί στην κυκλοειδή



Παράδειγμα

Η συντομότερη απόσταση μεταξύ 2 σημείων στο επίπεδο είναι η ευθεία:



$$S = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Με $f = \sqrt{1+(y')^2}$ η εξίσωση Euler είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{σταθερή} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = c \Rightarrow \frac{(y')^2}{1+(y')^2} = c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y')^2 = c^2 + c^2 (y')^2 \Rightarrow (y')^2 = \frac{c^2}{1-c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = \tilde{c}$$

Η δεύτερη μορφή της εξίσωσης Euler

Γνωρίζουμε ότι $f = f(y, y', x)$ και άρα:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$= y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

Επίσης

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Αντικαθιστώ για τη $2^{η}$ παράγωγο:

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{df}{dx} - y'\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} =$$

$$= \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^{\nearrow 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$ και χρησιμοποιείται

σε αντικατάσταση της αρχικής ότι η f εξαρτάται άμεσα από το x και $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$